1. Clasificar las funciones dadas en: campos escalares, funciones vectoriales o campos vectoriales. Justificar expresando en cada caso la dimensión del espacio en que está incluido el dominio y el codominio.

a) $f(u;v;w) = v + \dfrac{u}{w}$

b) $f(t) = (tg\,t;t^2)$

c) $f(t) = (sen\,t;\cos t;t)$

d) $f(u;v) = \left(\dfrac{u}{v};uv\right)$

e) $f(t;u;v) = (2tu;2u+v;u-tv)$

f) $f(u;v;w) = \left(\dfrac{\ln u}{v};w\right)$

2. Ejemplificar indicando una expresión algebraica:

a) Un campo vectorial de $A \subseteq R^2 \to R^4$
b) Una función vectorial de $A \subseteq R \to R^2$
c) Un campo escalar de $A \subseteq R^3 \to R$
d) Una función vectorial de $A \subseteq R \to R^3$
e) Un campo escalar de $A \subseteq R^4 \to R$

3. Dadas las siguientes funciones vectoriales, hallar el dominio

a) $F(t) = \left(\dfrac{t^3+1}{2^t};\cos t\right)$

b) $F(t) = (t^2+t+1;\ln t)$

c) $F(t) = \left(\sqrt{3-t};\sqrt{t-4};\dfrac{1}{t^2+1}\right)$

d) $F(t) = \left(\ln(t+2);\sqrt{2-t};\dfrac{1}{t^2+1}\right)$

4. Dados los siguientes campos escalares, hallar el dominio, analítica y gráficamente

a) $f(x;y) = \dfrac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{x-y}$

b) $f(x;y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

c) $f(x;y) = \sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}-1}$

d) $f(x;y) = \ln(x+5y)$

e) $f(x:y) = \dfrac{\sqrt{x-2y-4}}{\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}-1}$

f) $f(x;y) = \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

g) $f(x;y) = 5xy + 3y$

h) $f(x;y) = 3xy - \dfrac{1}{y}$

i) $f(x;y) = \dfrac{5}{x+y-4}$

j) $f(x;y) = [\ln(2x+y)]\sqrt{1-x^2-y^2}$

k) $f(x;y) = \sqrt{9-(2x+3y)}$

l) $f(x;y) = \ln(16 - x^2 + 4y^2)$

5. Dado los siguientes campos vectoriales, hallar el dominio, analítica y gráficamente.

a) $F(x;y)=\left(x^2+y;\dfrac{1}{x+y}\right)$

b) $F(x;y)=\left(\sqrt{x-y+3};x^2+y^2-2\right)$

c) $F(x;y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}};\ln(x+2y);\dfrac{x}{2x+y}\right)$

6. Para los niveles z: -2, -1, 0, 1, 2, 3 representar, cuando sea posibles, las curvas se nivel de las siguientes superficies.

a) $z = x^2 + y^2 - 1$

b) $z = 2\,xy$

c) $z=\dfrac{x^2+2}{y+1}$

d) $z = x + y$

e) $z=\dfrac{1}{x+y}$

f) $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$

g) $z = -1$

h) $z=\dfrac{y-1}{x^2+1}$

i) $z=\sqrt{1+x+y}$

j) $z = x^2 - y^2$

7. a) Calcular por definición las derivadas parciales de los campos escalares en los puntos que se indican. Interpretar geométricamente los resultados obtenidos.

1) $f(x;y) = 2\,x^2\,y - 5\,x\,y$ $\quad f_x'(2;-3),\quad f_y'(2;-3)$

2) $f(x;y) = 3\,x^2 - 2\,x\,y + y^2$ $\quad f_x'(3;-2),\quad f_y'(3;-2)$

3) $f(x;y) = 6\,x + 3\,y - 7$ $\quad f_x'(1;3),\quad f_y'(1;3)$

b) Calcular las funciones derivadas parciales primeras de los campos escalares del ejercicio 7. a)

c) En las funciones derivadas obtenidas en b), especificar los puntos (2;-3), (3;-2) y (1;3). Comparar el resultado con el obtenido en 7. a)

8. Obtener el vector gradiente de cada uno de los campos escalares del ejercicio 7 en los puntos indicados.

9. Calcular, aplicando las reglas de derivación, las derivadas parciales primeras de los siguientes campos escalares

a) $f(x;y)=\sqrt{\ln(3x-y)}$

b) $f(x;y)=e^{x^2}-y^{3/2}$

c) $f(x;y)=\dfrac{(x-y)^2}{x+y}$

d) $f(x;y)=e^{\frac{xy}{2}}$

e) $f(x;y)=4y^2+\sqrt{x^2+y^2}$

f) $f(x;y)=\dfrac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}}$

g) $f(x;y;z)=5(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

h) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{xy}{z}}$

i) $f(x;y;z)=4xyz+z\ln(2xy)$

j) $f(x;y)=e^{\frac{y}{x}}\ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right)+3$

k) $f(x;y)=\dfrac{x^2e^{xy+y^2}}{2y+x^2}$

l) $f(x;y)=\dfrac{3\sqrt{x}\,e^y}{3y^2+2x^3}$

10. Hallar el vector gradiente en los puntos indicados para los siguientes campos escalares.

a) $f(x;y)=(x-1)^2+y^2$ $P_0=(2;2)$

b) $f(x;y)=x^2+2xy-y$ $P_0=(-2;3)$

c) $f(x;y)=x^2+xy+y^2$ $P_0=(1;2)$

d) $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2$ $P_0=(1;1;0)$

11. Para los siguientes campos escalares, calcular las derivadas parciales segundas y verificar el teorema de Schwarz.

a) $f(x;y)=x^3y^2$

b) $f(x;y)=x^y$

c) $f(x;y)=x^2\,\mathrm{sen}(xy)$

d) $f(x;y)=xe^y$

12. a) Para los siguientes campos escalares calcular Δf y df en los puntos que se indican para los valores de los incrementos Δx y Δy dados

1) $f(x;y)=x^2+y^2-2x++4y$ $P_0=(-3;1)$ $\Delta x=0{,}1$ $\Delta y=-0{,}1$

2) $f(x;y)=x^2y^3$ $P_0=(-1;1)$ $\Delta x=0{,}1$ $\Delta y=-0{,}1$

3) $f(x;y)=\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ $P_0=(1;0)$ $\Delta x=-0{,}2$ $\Delta y=0{,}1$

4) $f(x;y)=y^2\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$ $P_0=(2;2)$ $\Delta x=0{,}4$ $\Delta y=-0{,}2$

b) Interpretar los resultados obtenidos en a)

13. Calcular $df = df(x; y; \Delta x; \Delta y)$ para cada una de las siguientes funciones

a) $f(x;y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(x^3 y)$

b) $f(x;y) = \dfrac{x}{y^2} + \ln(xy)$

c) $f(x;y) = y \operatorname{sen}(xy^2) + x^{1/y}$

d) $f(x;y) = y + \ln x + x e^y$

14. a) Determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de los siguientes campos escalares en el punto $(x_0; y_0; z_0)$

1) $f(x;y) = x^3 + y^3 - 3xy$ en $(x_0; y_0) = (1; 1)$

2) $g(x;y) = 2yx^y$ en $(x_0; y_0) = (1; -1)$

3) $h(x;y) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en $(x_0; y_0) = (3; 4)$

b) Utilizar las ecuaciones obtenidas en a) para hallar un valor aproximado de $f(1{,}01; 0{,}98)$, $g(1{,}01;-0{,}98)$, $h(2{,}9; 4{,}01)$

15. Aplicando diferenciales, calcular aproximadamente:

a) $(1{,}02)^{3{,}03}$

b) $\sqrt{(3{,}3)^2 + 2(2{,}1)^3}$

16. Desarrollar según el polinomio de Taylor hasta el segundo orden los siguientes campos escalares

a) $f(x;y) = x^y$ en un entorno de $P_0 = (1; 2)$

b) $f(x;y) = (x + 2)^{y-1}$ en un entorno de $P_0 = (0; 1)$

c) $f(x;y) = y \ln x$ en un entorno de $P_0 = (1; 2)$

17. Desarrollar mediante un polinomio de Maclaurin las siguientes funciones hasta orden dos:

a) $f(x;y) = \ln(1 + xy)$

b) $f(x;y) = e^{x+y}$

c) $f(x;y) = \operatorname{sen}(x + y)$

18. Hallar el polinomio de Taylor de orden dos de los siguientes campos escalares en las potencias que se indican en cada caso

a) $f(x;y) = x^3y^2 + xy + x$ en potencias de $(x-1)$, $(y+1)$

b) $f(x;y) = x^3 - 8y^3 + 2xy^2$ en potencias de $(x-2)$, $(y+3)$

c) $f(x;y) = x^2 - 2x^2y^3 + xy$ en potencias de x, $(y-3)$

19. Verificar que para $(x;y)$ en un entorno de (0; 0), $e^{xy} \cong 1 + xy$

20. Verificar que para $(x;y)$ en un entorno de (0; 0), $\cos x \cos y \cong 1 - \dfrac{x^2 + y^2}{2}$

21. Utilizando un polinomio de Taylor de segundo orden, hallar un valor aproximado de $(0,87)^{3,02}$

22. Hallar un valor aproximado de $\sqrt{1,03}\,\sqrt[3]{0,95}$ utilizando un polinomio de Taylor de segundo orden.

23. Hallar los puntos críticos de los siguientes campos escalares y clasificarlos.

a) $f(x;y) = \dfrac{x^3}{3} + y^2 + xy$

b) $f(x;y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$

c) $f(x;y) = y^2 - 2x^2y + x^4 - x^6$

d) $f(x;y) = x^3 + y^3 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

e) $f(x;y) = x^2y + xy^2 - x$

f) $f(x;y) = e^{-(x^2+y^2)}$

g) $f(x;y) = x^3 + y^3 - 3x$

h) $f(x;y) = (x-y)^4 + (x-2)^4$

i) $f(x;y) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 2y^3 - 3y^2 + 1$

24. Un fabricante hace dos clases de vasos y sabe que x docenas de la primera clase e y de la segunda clase serán vendidas a $(80 - 3x)$ y $(60 - 2y)$ pesos por docena respectivamente. ¿Cuántas docenas de vasos de cada clase deberá fabricar para maximizar sus utilidades, si el costo de fabricación es $C = 12x + 8y + 4xy$? (se supone que lo fabricado se vende)

25. Un fabricante produce diariamente x unidades se la mercancía A e y unidades de la B. Si $P(x;y)$ es la utilidad diaria que se obtiene de su venta y $P(x;y) = 33x + 66y + xy - x^2 - 3y^2$, ¿cuántas unidades de cada artículo deben producirse diariamente para que el fabricante logre la máxima utilidad diaria?

26. Hallar y clasificar los extremos condicionados de los siguientes campos escalares.

a) $f(x;y) = xy$ con $x + y = 4$

b) $f(x;y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ con $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$

c) $f(x;y) = 5x^2 - 6y^3 - xy$ con $x + 2y = 24$

d) $f(x;y) = x + y$ con $x^2 + y^2 = 1$

27. Dadas $f: A \subseteq R^2 \to R$; $f(x;y) = x^3 + xy$, $g: B \subseteq R \to R$; $g(t) = e^{-2t}$ sent. Hallar $h(x;y) = g(f(x;y))$

28. Dadas $F: A \subseteq R \to R^2$; $F(t) = (t^{3/2}$; $\ln t)$, $G: B \subseteq R^2 \to R^3$; $G(x;y) = \left(sen x + y; \frac{x}{y}; \sqrt[3]{x}\right)$.

Hallar $H(t) = G(F(t))$

29. Dadas $f: A \subseteq R^2 \to R$; $f(x;y) = \frac{x}{y}$, $G: B \subseteq R \to R^2$; $G(t) = \left(\sqrt{t}; \frac{1}{\ln t}\right)$. Hallar $H(x;y) = G(f(x;y))$

30. Dadas $f: A \subseteq R^3 \to R$; $f(x;y;z) = 2x + y + z$, $G: B \subseteq R \to R^3$; $G(t) = (t^2 ; 2t ; t - 1)$. Hallar $H(x;y;z) = G(f(x;y;z))$

31. Calcular la derivada total de z con respecto a t

a) $z = x \operatorname{sen} y$ con $x = \operatorname{sen} t$, $y = t^2$

b) $z = x^{\operatorname{sen} y}$ con $x = t^2 + 2$, $y = 2^{\ln t}$

32. Dadas $G: A \subseteq R \to R^2$, $G(t) = (5t; \sqrt{t})$ y $f: B \subseteq R^2 \to R$, $f(x;y) = x + y^2 x$; para h(t) definida por $h(t) = (f \circ G)(t)$; calcular h'(t):

a) por reemplazo
b) utilizando regla de la cadena

33. Dadas $G: R \to R^3$; $G(t) = (t^2 ; 1 - t ; t^3)$ y $f: R^3 \to R$; $f(x;y;z) = xyz$; para h(t) definida por $h(t) = (f \circ G)(t)$; calcular h'(-3) aplicando regla de la cadena.

34. Sean G : A $\subseteq$ R→R^2; $G(t)=\left(\ln t;\frac{1}{t}\right)$ y f : R^2 →R ; $f(x;y) = x^2 + y^2$, hallar h'(2) si h(t) = ($f \circ G$)(t)

35. Dadas G : A ⊆ R^2→R^3; $G(u;v)=\left(v^2-u;uv;\sqrt{uv}\right)$ y f : R^3 →R ; $f(x;y) = xy - y^2z$; se define $h(u;v)$ = ($f \circ G$)(u;v). Hallar $\frac{\partial h}{\partial u}(2;3)$ y $\frac{\partial h}{\partial v}(2;3)$

36. Aplicando regla de la cadena obtener las derivadas parciales de las funciones compuestas h(P) = ($f \circ G$)(P) definidas por:

   a) G : R^2→R^2 ; G(s;t) = (s – t; ts)
   f : R^2 →R ; $f(x;y) = x^3 - 2xy + y$

   b) G : R^2→R^3 ; G(s;t) = (5s + 2t; s – t^2; t + s)
   f : R^3 →R ; $f(x;y;z) = 6x^2 + zxy$

37. Dada la siguiente ecuación $\ln(xy) + z - \mathrm{sen}\,z + 4y = 4$

   a) Verificar las condiciones de existencia de $z = f(x;y)$ en P_0 = (1;1;0)
   b) Si es posible, hallar la derivadas correspondientes en (1;1)

38. Idem ejercicio anterior siendo la ecuación $x^3y - z^3y^2 - zx - 2 = 0$ y P_0 = (1;-2;1)

39. Sea la ecuación F(x;y;z) = 0 con F(x;y;z) = $x^2y + xyz + z^2y^2 - 7$ y P_0 = (1;1;2), calcular, si es posible, $x'_y(1;2)$

40. Para las funciones definidas en forma implícita por las siguientes ecuaciones, hallar x'_y ; x'_z ; y'_x ; y'_z ; z'_x ; z'_y

   a) $e^{xy} - \cos x + 3z^2 - 4z + 1 = 3x$
   b) $2xy^2 + ye^x + xe^y = xyz$
   c) $x + 3y + 2z - \ln z = 0$
   d) $z^2 - 2xy + y^2 = 0$

41. Para la función definida en forma implícita por $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - z + 8 = 0$, calcular d$z$ en (2;0), sabiendo que z(2;0) = 1

42. a) Estudiar si las siguientes funciones son homogéneas.

1) $F(x;y) = 3x^2 + 5xy - y^2$

2) $F(x;y) = \sqrt{2x^2 + y^2}$

3) $F(x;y) = x^2 e^{\frac{3}{y^2}}$

4) $F(x;y) = \left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^3$

5) $F(x;y) = 5x^2 - 3x^2y + 2y^3$

b) Para las funciones homogéneas dadas en a) verificar el Teorema de Euler.