

Es un arreglo rectangular que consta de n filas y m columnas (orden de la matriz) .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{L} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{L} & a_{2m} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{L} & \mathbf{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \mathbf{L} & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Se la denomina matriz $n \times m$ ó matriz de n filas y m columnas .Otra manera de expresarlo es $A^{n \times m}$.

Ejemplos .

$$A^{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} \quad B^{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A los números que constituyen una matriz se los denomina elementos a_{ij} donde i = número de filas y j = número de columnas, esto quiere decir en donde está posicionado el elemento, por ejemplo a_{23} elemento que está en la segunda fila y tercera columna.

Otra manera de expresar una matriz es $[a_{ij}]$.

Igualdad de matrices .Definición.

Dos matrices son iguales si y solo si, tienen el mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales.

Mismo orden:

número de filas de la matriz A= número de filas de la matriz B.

número de columnas de la matriz A= número de columnas de la matriz B.

Simbólicamente:

$$\text{Dadas } A = [a_{ij}] \wedge B = [b_{ij}] \text{ resulta } A=B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \forall i \wedge \forall j$$

Ejemplos .

Determinar cuales de las siguientes matrices son iguales

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

MATRICES ESPECIALES.

Matriz Cuadrada. Definición.

Es la matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas.

Ejemplo.

$$A^{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz Fila. Definición.

Es la matriz con una fila y cualquier número de columnas.

Ejemplo.

$$A^{1 \times 3} = [1 \quad -2 \quad 0]$$

Matriz Columna. Definición.

Es la matriz con una columna y cualquier número de filas.

Ejemplo.

$$A^{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Diagonal Principal. Definición.

Dada una matriz cuadrada su diagonal principal es la diagonal que se extiende de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha: $[a_{11}; a_{22}; a_{33}; \dots; a_{nn}]$

En el conjunto de valores $\{a_{ij}\}$ con $i = j$

Matriz nula. Definición.

Es aquella que tiene cero todos sus elementos. (Se expresa como $\bar{0}$).

Ejemplo.

$$A^{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Matriz Triangular Superior. Definición.

Sea A una matriz cuadrada de orden n si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son 0. \Rightarrow A es triangular superior.

Una matriz $A^{n \times n}$ se denomina triang. sup. $\Leftrightarrow \forall i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior. Definición.

Sea A una matriz cuadrada de orden n si todos los elementos por arriba de la diagonal principal son 0 \Rightarrow A es triangular inferior.

Una matriz $A^{n \times n}$ se denomina triang. inf. $\Leftrightarrow \forall i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Ejemplo.

$$A^{4 \times 4} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal. Definición.

Sea una matriz cuadrada de orden n si todos los elementos por debajo y por arriba de su diagonal principal son 0 \Rightarrow es una matriz diagonal.

Es decir $A^{n \times n}$ es diagonal $\Leftrightarrow \forall i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Matriz Identidad. Definición.

Es una matriz diagonal en donde los elementos de la diagonal principal son 1. (y se denota como I).

Es la matriz $A^{n \times n}$ que cumple $\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Ejemplo.

$$I^{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Escalar. Definición.

Es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son el mismo número.

$A^{n \times n}$ es escalar cuando $\begin{cases} a_{ij} = \alpha & \text{si } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Ejemplo.

$$A^{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz Traspuesta. Definición.

Es la matriz que se obtiene de intercambiar sus filas por sus columnas.

$$\text{Si } A^{n \times m} = a_{ij}, A_{m \times n}^t \Leftrightarrow A_{m \times n}^t = a_{ji}$$

Ejemplo.

$$A^{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (A^t)^{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES.

Suma de matrices. Definición.

Si A y B son dos matrices del mismo orden $n \times m \Rightarrow A+B$ es una matriz de $n \times m$ que se obtiene sumando los correspondientes elementos.

$$\text{Si } A^{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ y } B^{2 \times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

1) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ hallar } A + B$$

Dos matrices de distinto orden no se pueden sumar.

2) Encuentre la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, sabiendo que $X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = I$

Resta de matrices. Definición.

Si A y B tienen el mismo orden $n \times m \Rightarrow A - B$ o sea $A + (-B)$ es una matriz de $n \times m$ que se obtiene restando los correspondientes elementos.

Ejemplo.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 1 & -6 & -3 \end{bmatrix}, \text{ hallar } A - B$$

Producto de una matriz por un escalar (número real). Definición.

Si A es una matriz $n \times m$ y k es un número real (escalar) \Rightarrow la matriz kA se obtiene de multiplicar K por cada elemento de la matriz.

$$k \cdot A = k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

$$\text{Si } k = 5 \text{ y } A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow k \cdot A =$$

Multiplicación de matrices. Definición.

Sea una matriz A de orden $n \times m$ y B de orden $p \times q \Rightarrow A \cdot B = C$ donde C es de orden $n \times q \Leftrightarrow m = p$

Se pueden multiplicar dos matrices si y solo si el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda.

Ejemplo.

$$A^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{3 \times 3} \cdot B^{3 \times 2} = C^{3 \times 2} \Rightarrow A \cdot B =$$

$$B \times A \text{ no se puede hacer } (B^{3 \times 2} \cdot A^{3 \times 3})$$

Determinante: $\frac{1}{2}A\frac{1}{2}$, $\det(A)$ o $\Delta(A)$ - Definición.

A cada matriz cuadrada ($n \times n$) le está asociado un número \mathfrak{R} llamado determinante de esa matriz.

I) Si $A^{1 \times 1} \Rightarrow |A| = a_{11}$

II) Si $A^{2 \times 2}$ por definición

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

Ejemplo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2$$

III) Determinante de 3×3 por definición.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{32} a_{33} a_{11}$$

Método de Sarrus (solo 3 x 3).

Se ponen debajo las dos primeras filas y se multiplican las diagonales de 3 elementos.

$$\begin{array}{r} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \\ + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} - \\ + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Ejemplos.

Resolver :

1) $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

2) Hallar los valores de x de tal forma que se cumpla la siguiente igualdad :

$$\begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Menor complementario: (M_{ij})

Sea una matriz cuadrada de orden N \Rightarrow el menor complementario de un elemento a_{ij} se obtiene eliminando la fila y la columna j de la matriz y hallando el determinante de la submatriz que me queda.

Ejemplo.

Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, hallar:

$M_{11} =$

$M_{23} =$

Adjunto ó cofactor: (A_{ij})

Consiste en multiplicar el menor complementario por $(-1)^{i+j}$. O sea : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Ejemplo.

Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, hallar:

$A_{11} =$

$A_{23} =$

Matriz cofactor. Definición.

Es la matriz que se hace con los cofactores de una matriz A.

Matriz adjunta .Definición.

Es la matriz formada por los cofactores de la matriz traspuesta de una matriz dada.

$$\text{adj } A = \text{cof } A^t$$

Método de Laplace para determinantes. (o desarrollo de filas y columnas).

Todo determinante de una matriz A es igual a la suma de los productos fila (o columna) cualquiera por sus correspondientes cofactores.

$$|A| = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + a_{i3} C_{i3} + \dots + a_{in} C_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

$$|A| = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + a_{3j} C_{3j} + \dots + a_{nj} C_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Desarrollar por la fila 2.

Propiedades de los determinantes.

1) Si son cero todos los elementos de una fila (ó columna) de A $\Rightarrow |A| = 0$

Ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2) Si dos filas ó dos columnas son idénticas $\Rightarrow |A| = 0$

Ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{columna 1 = columna 4}$$

3) Si una matriz es triangular inferior o superior $\Rightarrow |A|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-2) \cdot 1 = -20$$

4) Si B es la matriz que se obtiene cambiando dos filas o columnas de A $\Rightarrow |A| = -|B|$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

\Rightarrow cambiando la fila dos por la cuatro

$$\Rightarrow |B| = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \quad \text{por propiedad } |A| = -4 \quad \Rightarrow |A| = -|B|$$

5) Si la B es la matriz que se obtiene multiplicando una fila o columna de A por el mismo número k $\Rightarrow |B| = k|A|$

Ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

6) El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| |B|$$

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 = -6$$

7) El determinante de la traspuesta de A es igual al determinante de A .

$$|A^t| = |A|$$

8) El determinante de la matriz inversa es : $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$$9) \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplos :

1) ¿ Puede asociar un determinante a la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$? ¿ Por qué ?

2) ¿ Puede aplicar la regla de Sarrus para resolver el siguiente determinante ? ¿ Por qué ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

Calcularlo .

3) ¿ Cómo halla directamente el valor del determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & -6 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & -1 & 2 \end{vmatrix}$?

4) Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix} 2-x & -3 & 6 \\ 4 & 1+x & -2 \\ 2 & -1 & 2+x \end{vmatrix} = 0$.

5) Resolver :

a) $|A \cdot A^{-1}| =$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} =$

6) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4$, determinar : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 2a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 6a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$

Matriz inversa.

Se dice que una matriz cuadrada es inversible si \exists una matriz B con la siguiente propiedad:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

\Rightarrow B es la matriz inversa de A y se denota A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Condición necesaria y suficiente para que exista matriz inversa.

Dada $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

Una matriz tiene inversa si es cuadrada y su determinante es distinto de 0.

Método de la adjunta para determinar la matriz inversa.

En general $A \cdot \text{adj } A = |A| \cdot I$, o sea :

$$A^{-1} \cdot A \cdot \text{adj } A = A^{-1} \cdot |A| I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } (A)$$

Ejemplo .

Hallar, si es posible la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS .

I) 1) Cuál es el orden de las siguientes matrices?.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 9 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = [2 \ 0 \ 1 \ -5]$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $F = [2]$

2) Cuál es el valor del elemento si existe?

$$\begin{matrix} a_{12} & b_{14} & c_{23} & d_{12} & e_{21} & f_{11} \\ a_{23} & b_{21} & c_{11} & d_{22} & e_{23} & f_{12} \end{matrix}$$

3) Decir si estas matrices son iguales.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

c) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $G = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

II) Sumar las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

c) $[1 \ 2 \ 3] + [4 \ 5 \ 6]$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 \\ -4 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

III) Resolver si es posible.

1) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $C \cdot A$ d) $B \cdot C$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B$

2) $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

- a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

3) $A = [-5 \ 1 \ 2 \ 3]$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

- a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) $A \cdot B \cdot C$

IV) Resolver:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) A^t

b) $A - A^t$

c) $A + A^t + 2(A \cdot A^t)$

d) $A \cdot A^t + 2A^t$

e) $\frac{1}{2}(A + A^t) + 3 \cdot A^t + 2A$

2) Efectuar todos los productos posibles.

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ $B = [-1 \ 2 \ 0 \ 4]$ $C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

3) Sean las matrices de $\mathbb{R}^{2 \times 3}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calcular

a) $A + B$

b) $-1 \cdot B$

c) $A - B$

d) $4(A + B)$

e) $2 \cdot A$

f) $-3A + 2 \cdot B$

4) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$

Hallar:

a) $A + B - D = \bar{0}$

b) $A + 2B = 3D$

c) $2A + 3B - 4D = 5A$

$$5) \text{ Siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Verificar si es V o F.

a) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

b) $A \cdot B = B \cdot A$

6) Siendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad E = [1 \quad -4 \quad 2] \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Calcular:

a) $A \cdot B$

b) $2FE - 5B$

c) $3EC$

d) $B \cdot (D + 2G)$

e) $2D - \frac{1}{2}G \cdot D$

f) $A \cdot B \cdot C$

g) $C \cdot F$

h) D^2

i) $3G \cdot (3D - 3 \cdot G)$

j) $2H - \frac{3}{2}G \cdot H$

k) $B \cdot (2H + 3D)$

l) $2H^2$

7) Evaluar los determinantes de los siguientes problemas:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}$

8) Determinar k si $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 12$

9) En los siguientes problemas, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ determine cada expresión.

a) El menor de a_{31}

b) El menor de a_{22}

c) El cofactor de a_{23}

d) El adjunto de a_{32}

10) Si $A = [a_{ij}]$ es 50×50 , y el menor de $a_{43,47}$ es igual a 20 ¿cuánto vale el cofactor de $a_{43,47}$?.

11) En los siguientes problemas, evalúe el determinante. Utilice, si es posible, las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

12) Obtenga el valor de x.

a) $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 7 & 7 - x \end{vmatrix} = 26$

b) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2x \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x - 1 \end{vmatrix} = 60$

13) Utilice las adjuntas para obtener las inversas.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \\ 0 & 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Complemento de ejercicios de determinantes.

1) Si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 12$

Encuéntrese el valor de cada uno de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} =$

c) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a_1 + 3a_3 & b_1 + 3b_3 & c_1 + 3c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$

2) Resolver:

a) $|A \cdot A^{-1}| =$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} =$

3) Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 4, \text{ entonces determine: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 2a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 6a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$$